

11. |  $x^3 + y^3 = ?$

$x + y = 5$

$x + y + x^2y + xy^2 = 24$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 5(x^2 + y^2 - xy)$

$x + y + x^2y + xy^2 = x(1+xy) + y(1+xy) = (x+y)(1+xy)$

$5(1+xy) = 24$

$xy = \frac{24}{5} - 1 = \frac{19}{5}$

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{19}{5}$

$25 = x^2 + y^2 + \frac{38}{5}$

$x^2 + y^2 = \frac{125 - 38}{5} = \frac{87}{5}$

$x^3 + y^3 = 5 \left( \frac{87}{5} - \frac{19}{5} \right) = 68$

Ответ:  $x^3 + y^3 = 68$

13  $V_{куб} = V_{тетр.}$

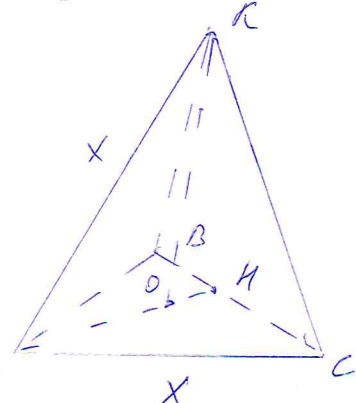
$\frac{S_{куб}}{S_{тетр.}} = ?$

Пусть  $a$  - сторона куба, тогда

$V_{куб} = a^3$ ;  $S_{куб} = 6a^2$

$V_{тетр.} =$

Пусть  $x$  - сторона тетраэдра, тогда



$AK = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = x\sqrt{\frac{3}{4}}$

П.к. АК медиана  $\Rightarrow AO = \frac{AK \cdot 2}{3} =$

$= \frac{x\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 2}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

$OK = \sqrt{x^2 - \frac{x^2 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{x^2 \cdot 6}{9}} = \frac{x}{3}\sqrt{6}$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DK = \frac{1}{3} \cdot \frac{AH \cdot BC}{2} \cdot DK$$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{x}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} \sqrt{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x \sqrt{6}}{3} =$$

$$= \frac{x^3 \cdot 3 \sqrt{2}}{3 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{x^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Т.к. } V_{\text{тетр}} = V_{\text{куб}} \Rightarrow a^3 = \frac{x^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$x^3 = \frac{12a^3}{\sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{12a^3}{\sqrt{2}}}$$

$$S_{\text{куб}} = 6a^2$$

$$S_{\text{тетр}} = 4 \cdot \frac{\frac{x}{2} \sqrt{3} \cdot x}{2} = x^2 \sqrt{3} = \left( \frac{12a^3}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{3} =$$

$$= \left( \frac{144a^6}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = (72a^6)^{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$$

$$\frac{S_{\text{к}}}{S_{\text{т}}} = \frac{6a^2}{a^2 \cdot (72)^{\frac{1}{3}} \sqrt{3}} = \frac{6}{(9 \cdot 8)^{\frac{1}{3}} \sqrt{3}} = \frac{6}{2 \cdot (9)^{\frac{1}{3}} \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{(9)^{\frac{1}{3}} \cdot 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

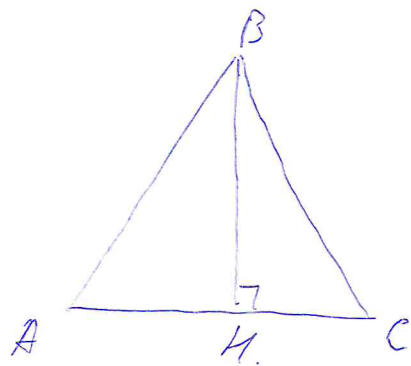
$$54 \quad \sin \angle A = 2 \sin \angle B \cdot \cos \angle C$$

Допущение:  $\triangle ABC$  — равнобедренный.

Док-во:

$$\sin \angle A = \frac{BH}{AB}, \quad \cos \angle C = \frac{HC}{BC}$$

$$\frac{BH}{AB} = 2 \cdot \frac{HC}{BC} \cdot \sin \angle B$$



$$\textcircled{9} \quad \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A} \Rightarrow \sin \angle B = \frac{\sin \angle A \cdot AC}{BC}$$

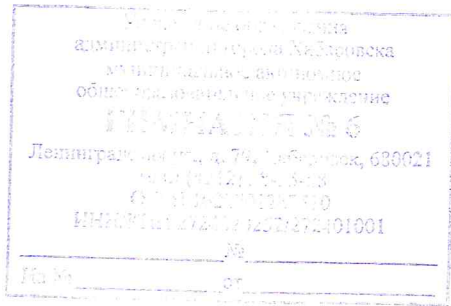
$$\frac{BH}{AB} = 2 \cdot \frac{HC}{BC} \cdot \frac{BH}{AB} \cdot \frac{AC}{BC}$$

$$BC^2 = 2 \frac{AC^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = AC \Rightarrow$$

$$(BC^2 = 2 HC \cdot AC) \quad \checkmark \quad \Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный.}$$

Цыбома Леонид, 11



§11.2  $9 + 99 + 999 + \dots, 9 \dots 9$

Сколько единиц в десятичной записи числа?

Кол-во слагаемых - 2019

$$9 + 99 = 108 \quad (1 \text{ ед.})$$

$$9 + 99 + 999 = 1107 \quad (2 \text{ ед.})$$

$$9 + 99 + 999 + 9999 = 11106 \quad (3 \text{ ед.})$$

$$9 + 99 + 999 + 9999 + 99999 = 111105 \quad (4 \text{ ед.})$$

Кол-во единиц = Кол-во слагаемых - 1

Кол-во единиц - 2018

46

§11.5

